Chapitre 11

Nombres réels

Plan du chapitre

1 Propriété de la borne supérieure

Rappel : $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble ordonné. Cet ordre est total. La relation $\leq$ définit les notions suivantes :

Définition 11.1 (Rappels : majorants, minorants)

Soit $m, M \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. On dit que :

- A est majorée par M si tout élément de A est inférieur ou égal à M, càd $\quad \forall x \in A \quad x \leq M$.
- A est minorée par m si tout élément de A est supérieur ou égal à m, càd $\quad \forall x \in A \quad x \geq m$.
- A est majorée si A admet un majorant.
- A est minorée si A admet un minorant.
- A est bornée si A est à la fois majorée et minorée.

On dit aussi que M est un majorant de A, et que m est un minorant de A.

Définition 11.2 (Rappels : maximum, minimum)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est ***le*** maximum de A si M est un majorant de A et $M \in A$.
- $m \in \mathbb{R}$ est ***le*** minimum de A si m est un minorant de A et $m \in A$.

Le maximum et le minimum, lorsqu'ils existent, sont uniques. Ils sont notés respectivement :

$$\max A \qquad \min A$$

On dit aussi que $\max A$ est le plus grand élément de A et que $\min A$ est le plus petit élément de A.

Définition 11.3 (NOUVEAU : borne inférieure et supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est ***la*** borne supérieure de A si M est le plus petit des majorants de A.
- $m \in \mathbb{R}$ est ***la*** borne inférieure de A si m est le plus grand des minorants de A.

La borne supérieure et la borne inférieure, lorsqu'elles existent, sont uniques. Elles sont notées :

$$\sup A \qquad \inf A$$

Attention, un majorant / minorant / maximum / minimum / "borne sup" / "borne inf" doit toujours être un élément de $\mathbb{R}$: ils ne peut pas valoir $+\infty$ ou $-\infty$ (sauf si on vous impose une convention...)

Partie $A \subset \mathbb{R}$	Minorée	$\inf A$	$\min A$	Majorée	$\sup A$	$\max A$
$[0,1]$						
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Q}$						
$]0,1[$						
$\left\{ -\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$						

Propriété 11.4 (Axiome : propriété de la borne supérieure)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

Parenthèse (Hors programme). C'est un axiome et une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, inhérente à sa construction. Très grossièrement, cela veut dire que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet une limite finie, cette limite "ne sort pas de $\mathbb{R}$" et restera dans $\mathbb{R}$.
Par contre, $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure : on peut trouver une suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ dont la limite (finie) "sort de $\mathbb{Q}$". En utilisant le développement décimal de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$$

on peut définir une suite u_n :

$$\begin{array}{ll} u_0 = 1 & u_3 = 1{,}414 \\ u_1 = 1{,}4 & u_4 = 1{,}4142 \\ u_2 = 1{,}41 & \ldots\ldots \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n \in \mathbb{Q}$. Mais la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\sqrt{2}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. C'est une façon de prouver que $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

Propriété 11.5 (Caractérisation de la borne supérieure / inférieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide. Si A est majorée,

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A & & x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A & x > M - \varepsilon \end{cases}$$

De même, si A est minorée,

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A & & x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A & x < m + \varepsilon \end{cases}$$

Attention : contrairement à $\max A$, le réel $\sup A$ n'appartient pas forcément à A.

Exemple 1. On pose $A = \left\{ -\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que $\sup A = 0$.

Propriété 11.6

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\max A = \sup A$.

De même, si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et $\min A = \inf A$.

La réciproque de cette assertion est fausse, cf tableau ci-dessus avec l'ensemble $]0,1[$.

Démonstration. Soit $M = \max A$ le maximum de A. Alors M est un majorant de A donc

$$\forall x \in A \quad x \leq M$$

Prouvons maintenant que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x > M - \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $x = M \in A$. Alors $M > M - \varepsilon$. Donc cette assertion est vraie. Ainsi, A admet une borne supérieure et $M = \sup A$. $\square$

Méthode

Lorsqu'on cherche une borne supérieure M d'un ensemble A, on peut donc :

- Utiliser la caractérisation (propriété 11.5), mais cela nécessite de connaitre à l'avance la valeur de M : un travail au brouillon peut être nécessaire pour deviner M.
- Si on constate (au brouillon) que M est en fait le maximum de A, alors il suffit de montrer que $M = \max A$, càd $M \in A$ et $\quad \forall x \in A \quad x \leq M$.
- Si A est correspond à l'ensemble image d'une fonction réelle, on peut étudier cette fonction pour en trouver le maximum, qui sera alors le maximum de A.

Exemple 2. Déterminer la borne supérieure de $A = \{x(1-x) \mid x \in [0,1]\}$.

2 Approximation décimale d'un réel

Définition 11.7 (Ensemble $\mathbb{D}$)

On dit qu'un réel x est un nombre décimal si on peut l'écrire avec un nombre fini de décimales, ou de manière équivalente si

$$\exists a \in \mathbb{Z} \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad x = \frac{a}{10^n}$$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} := \left\{ \frac{a}{10^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Tout nombre entier est un nombre décimal. Plus généralement, si $x = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors x possède au plus n décimales.

On notera que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exemple 3. On a $0,654 = \dfrac{654}{1000} \in \mathbb{D}$ ou encore $\dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{100} \in \mathbb{D}$, mais $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Exemple 4. Étant donné $k \in \mathbb{N}^*$, on peut montrer que $\dfrac{1}{k} \in \mathbb{D}$ si et seulement si $k = 2^p 5^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Propriété 11.8

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre décimal $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{D}$ vérifie

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

r_n est appelé valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.
$r_n + \dfrac{1}{10^n}$ est appelé valeur approchée par excès de x à 10^{-n} près.

	1	$\sqrt{2}$	e	-1	$-\sqrt{2}$
Développement décimal	1	1,41421...	2,71828...	-1	$-1,41421...$
par défaut à 10^{-3} près	$1,000$	$1,414$	$2,718$	....	....
par excès à 10^{-3} près	$1,001$	$1,415$	$2,719$	....	....

Pour un réel ...., la valeur par défaut à 10^{-n} près s'obtient en tronquant son développement décimal à la n-ième décimale.

En utilisant le fait que $\pi = 3,141592653...$:

- La valeur approchée de π par défaut à 10^{-5} près vaut : ....
- La valeur approchée de π par excès à 10^{-5} près vaut : ....

3 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Propriété 11.9 (Partie dense)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est dense dans $\mathbb{R}$ si elle vérifie l'une de ces assertions (qui sont équivalentes) :

(i) Pour tous réels a, b avec $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ contient (au moins) un élément de X.

(ii) Pour tous réels a, b avec $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ contient une infinité d'éléments de X.

On peut traduire le fait que l'intervalle $]a, b[$ contient (au moins) un élément de X par : $]a, b[\cap X \neq \varnothing$.

Démonstration. Montrons que ces deux assertions sont équivalentes. Le sens *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)* est évident. Montrons *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*. Soit $a < b$ deux réels. Montrons que $]a, b[$ contient une infinité d'éléments de X. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $]a, b[$ contient (au moins) n éléments de X.
On pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

On a alors $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$. En particulier, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ est inclus dans $]a, b[$. Or, par *(i)*, chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ contient un élément $x_k \in X$. Ainsi, l'intervalle $]a, b[$ contient $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ qui sont tous des éléments de X. D'où le résultat. □

Théorème 11.10

Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Heuristique de la preuve. Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. Montrons que $]a,b[$ contient un élément de $\mathbb{D}$, puis de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

On pose $x=\dfrac{a+b}{2}$, de sorte que $a<x<b$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $r_n\in\mathbb{D}$ la valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près. Pour $n\in\mathbb{N}$ assez grand, on peut montrer que

$$a<r_n\leq x<b$$

et donc $r_n\in]a,b[\cap\mathbb{D}$. On en déduit que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$, on a également $r_n\in]a,b[\cap\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Enfin, montrons que $]a,b[$ contient un irrationnel. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $]a-\sqrt{2},b-\sqrt{2}[$ contient un rationnel q. Donc $]a,b[$ contient $q+\sqrt{2}$. Or, $\sqrt{2}$ est irrationnel et on sait que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel, donc $q+\sqrt{2}\in]a,b[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$. Ainsi, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. $\square$

Corollaire 11.11

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. L'intervalle $]a,b[$ contient une infinité de décimaux, de rationnels et d'irrationnels.

Corollaire 11.12

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$. Il existe (au moins) un décimal, un rationnel et un irrationnel dans $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$.

Ainsi, avec ε aussi petit que l'on souhaite, on pourra toujours trouver un rationnel r (par exemple) qui vérifie $|r-x|<\varepsilon$. Autrement dit, on pourra toujours trouver un rationnel aussi près que l'on veut d'un réel x donné.

4 Compléments

La droite numérique achevée

Définition 11.13 (Droite numérique achevée)

On note $\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux éléments qui ne sont pas dans $\mathbb{R}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordre $\leq$ défini sur $\mathbb{R}$, avec les relations

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad -\infty<x<+\infty$$

(càd $x\leq+\infty$ et $x\neq+\infty$, idem pour $-\infty$). L'ensemble $(\overline{\mathbb{R}},\leq)$ est alors un ensemble ordonné, et l'ordre est total.

On verra au prochain chapitre qu'on peut également définir les opérations $+$, $-$, $\times$, etc. sur $\overline{\mathbb{R}}$. À ce stade, il s'agit plus d'une commodité qu'autre chose.

Les intervalles de $\mathbb{R}$

On rappelle que si a, b sont deux réels, alors on note $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Définition 11.14

Soit $X \subset \mathbb{R}$. On dit que X est un <u>intervalle (de $\mathbb{R}$)</u> si

$$\forall x, y \in X \qquad (x \leq y \implies [x,y] \subset X)$$

En d'autres termes, un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de "trou" : si deux points x et y sont dans un intervalle, tous les points du segment qui relie x à y sont aussi dans cet intervalle.

On peut alors montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ s'écrit : $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \leq b$, avec l'interdiction de "fermer" en $\pm\infty$: $\cancel{[-\infty}, \ldots$ et $\cancel{+\infty]}$.

Exemple 5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le singleton $\{a\}$ est un intervalle, car il est égal à l'ensemble $[a,a]$.
$\varnothing$ est un intervalle. On peut par exemple dire qu'il est égal à l'intervalle $]a,a[$.
Toutefois, pour éviter d'éventuelles confusions, on écrira toujours $\{a\}$ et $\varnothing$ plutôt que les formes "intervalles" ci-dessus.